

不量仪器高、棱镜高的三角高程测量

张仰焄¹, 朱 鹤², 康 明¹, 蒋建国¹

(1. 上海市测绘院, 上海 200063; 2. 同济大学测量与国土信息工程系, 上海 200092)

Trigonometric Leveling without Measurement of the Height of the Instrument and Prism

ZHANG Yang-xun, ZHU He, KANG Ming, JIANG Jianguo

摘要:目前在上海市兴建的磁悬浮快速列车工程,要求离地面 10 m 多高的轨道梁高程定位的精度为 ± 1 mm,如此高精度要求采用精密的水准测量是难以实施的,故拟采用不量仪器高、棱镜高的三角高程测量来实现高程传递。

关键词:仪器高; 棱镜高; 三角高程

一、工程概况

上海市磁悬浮快速列车工程是市重点工程项目,采用德国先进技术建造。它西起地铁 2 号线龙阳路站,东至浦东国际机场。线路正线全长约 30 km,双线折返运行。由于磁悬浮高速列车工程对轨道梁初定位的要求极高,因此要求将平面和高程控制点引测到盖梁上。

盖梁上水准线路分段布设,每条线路长 1 km 左右,水准线路采用不量仪器高、棱镜高的三角高程测量和二等水准测量相结合的方法。

首先由地面高程控制点将高程引测到盖梁上,盖梁上水准线路两端点的高程采用不量仪器高、棱镜高的三角高程测量方法,中间点采用二等水准测量方法。每条线路两端点(即三角高程引测的点)高程在不同水准线路中应加以校核。

二、不量仪器高、棱镜高的三角高程测量的原理

如图 1,为了测量点 A 到点 B 的高差,在 I 处安置全站仪、A 处安置棱镜,测得 IA 的距离 S_1 和垂直角 α_1 ,从而计算 I 点处全站仪中心的高程 H_I

$$H_I = H_A + v - \Delta h_1 \quad (1)$$

然后把 A 点处的棱镜丝毫不改变其长度安置于 B 点处,测得 IB 的距离 S_2 和垂直角 α_2 ,从而计算 B 点的高程 H_B

$$H_B = H_I + \Delta h_2 - v \quad (2)$$

点 A 和点 B 高差 H_{AB} 为

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A = v - \Delta h_1 + \Delta h_2 - v = \Delta h_2 - \Delta h_1 \quad (3)$$

从式(3)看出,欲求的点 A 和点 B 的高差已自行消除了仪器高和棱镜高,也就不存在量取仪器高和棱镜高的误差了。

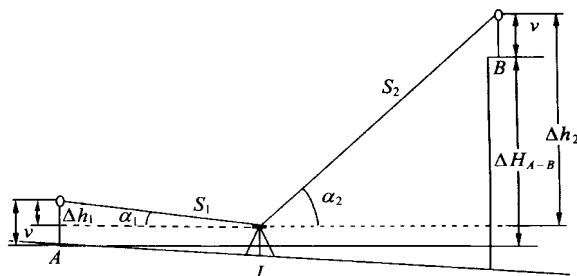


图 1

三、三角高程测量的精度分析

1. 单向观测三角高程测量高差的计算公式为

$$\Delta h = s \sin \alpha + (1 - k) \frac{s^2 \times \cos^2 \alpha}{2R} + i - v \quad (4)$$

或

$$\Delta h = D \times \tan \alpha + (1 - k) \frac{D^2}{2R} + i - v$$

式中, Δh 为三角高程测量的高差; s 为仪器到棱镜的斜距; D 为仪器到棱镜的平距; α 为垂直角; k 为大气垂直折光系数, $k = 0.14$; R 为地球平均曲率半径, $R = 6370$ km; i 为仪器高; v 为觇牌高或棱镜高。

2. 单向观测三角高程测量高差的误差公式为

或

$$\left. \begin{aligned} m_{\Delta h}^2 &= (\sin \alpha_{m_s})^2 + \left(s \cos \alpha \frac{mq}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{s^2}{2R} \right)^2 \\ &\quad m_k^2 + m_i^2 + m_v^2 \\ \text{或} \\ m_{\Delta h}^2 &= (\tan \alpha_{m_D})^2 + \left(\frac{D}{\cos^2 \alpha} \times \frac{mq}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{D^2}{2R} \right)^2 \\ &\quad m_k^2 + m_i^2 + m_v^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

从式(3)看出施测 AB 的高差时是不量取仪器高和棱镜高的,因此 不存在仪器高和棱镜高的误差 m_i, m_v , 式(5)变为

或

$$\left. \begin{aligned} m_{\Delta h}^2 &= (\sin \alpha_{m_s})^2 + \left(s \cos \alpha \frac{mq}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{s^2}{2R} \right)^2 m_k^2 \\ \text{或} \\ m_{\Delta h}^2 &= (\tan \alpha_{m_D})^2 + \left(\frac{D}{\cos^2 \alpha} \frac{mq}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{D^2}{2R} \right)^2 m_k^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

从式(6)可知单向观测三角高程测量高差的误差只与距离、垂直角的误差和两气差有关。

3. 点 A 到点 B 高差的计算公式为

或

$$\left. \begin{aligned} \Delta h &= s_i \sin \alpha_i + (1 - k) \frac{s_i^2 \times \cos^2 \alpha_i}{2R} - \\ &\quad \left\{ s_j \times \sin \alpha_j + (1 - k) \frac{s_j^2 \times \cos^2 \alpha_j}{2R} \right\} \\ \text{或} \\ \Delta h &= D_i \times \tan \alpha_i + (1 - k) \frac{D_i^2}{2R} - \\ &\quad \left\{ D_j \times \tan \alpha_j + (1 - k) \frac{D_j^2}{2R} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

点 A 到点 B 高差误差 $m_{\Delta H_{AB}}$ 的计算

$$m_{\Delta H_{AB}}^2 = m_{\Delta h_1}^2 + m_{\Delta h_2}^2 \quad (8)$$

4. 单向观测三角高程测量高差的误差分析。
当采用高精度的全站仪测量距离和垂直角,AB 点的高差能达到什么精度呢? 现令:

$$m_\alpha = \pm 1.0'' , m_s = \pm 1.0 \text{ mm}$$

和

$$m_\alpha = \pm 1.5'' , m_s = \pm 1.5 \text{ mm}$$

代入式(6),按不同的距离和垂直角计算高差的误差,计算结果见表 1 和表 2。

表 1 mm

距离/ m	垂直角									
	5 °	8 °	10 °	13 °	15 °	18 °	20 °	23 °	25 °	28 °
10	0.10	0.15	0.18	0.23	0.26	0.31	0.34	0.39	0.42	0.47
15	0.11	0.16	0.19	0.24	0.27	0.32	0.35	0.40	0.43	0.47
20	0.13	0.17	0.20	0.24	0.28	0.32	0.35	0.40	0.43	0.48
25	0.15	0.18	0.21	0.25	0.28	0.33	0.36	0.41	0.44	0.48
30	0.17	0.20	0.23	0.27	0.29	0.34	0.37	0.41	0.44	0.49
35	0.19	0.22	0.24	0.28	0.31	0.35	0.38	0.42	0.45	0.49
40	0.21	0.24	0.26	0.29	0.32	0.36	0.39	0.43	0.46	0.50
45	0.23	0.26	0.28	0.31	0.33	0.37	0.40	0.44	0.47	0.51
50	0.26	0.28	0.30	0.33	0.35	0.39	0.41	0.45	0.48	0.52
55	0.28	0.30	0.32	0.34	0.37	0.40	0.42	0.46	0.49	0.53
60	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	0.42	0.44	0.47	0.50	0.54
65	0.33	0.34	0.36	0.38	0.40	0.43	0.45	0.49	0.51	0.55
70	0.35	0.36	0.38	0.40	0.42	0.45	0.47	0.50	0.52	0.56
75	0.37	0.39	0.40	0.42	0.44	0.46	0.48	0.51	0.54	0.57
80	0.40	0.41	0.42	0.44	0.46	0.48	0.50	0.53	0.55	0.58
85	0.42	0.43	0.44	0.46	0.48	0.50	0.52	0.55	0.56	0.59
90	0.44	0.46	0.46	0.48	0.50	0.52	0.53	0.56	0.58	0.61
95	0.47	0.48	0.49	0.50	0.52	0.54	0.55	0.58	0.60	0.62
100	0.49	0.50	0.51	0.52	0.54	0.56	0.57	0.59	0.61	0.64

$$m_s = \pm 0.001 \text{ m} \quad m_\alpha = \pm 1'' \quad m_k = \pm 0.05$$

距离/m	垂直角									
	5°	8°	10°	13°	15°	18°	20°	23°	25°	28°
10	0.15	0.22	0.27	0.34	0.39	0.47	0.52	0.59	0.64	0.71
15	0.17	0.24	0.28	0.35	0.40	0.47	0.52	0.59	0.64	0.71
20	0.20	0.25	0.30	0.37	0.41	0.48	0.53	0.60	0.65	0.72
25	0.22	0.28	0.32	0.38	0.43	0.49	0.54	0.61	0.65	0.72
30	0.25	0.30	0.34	0.40	0.44	0.51	0.55	0.62	0.66	0.73
35	0.29	0.33	0.36	0.42	0.46	0.52	0.57	0.63	0.67	0.74
40	0.32	0.36	0.39	0.44	0.48	0.54	0.58	0.64	0.69	0.75
45	0.35	0.39	0.41	0.46	0.50	0.56	0.60	0.66	0.70	0.76
50	0.39	0.42	0.44	0.49	0.52	0.58	0.62	0.68	0.71	0.77
55	0.42	0.45	0.47	0.52	0.55	0.60	0.64	0.69	0.73	0.79
60	0.45	0.48	0.50	0.54	0.57	0.62	0.66	0.71	0.75	0.80
65	0.49	0.51	0.53	0.57	0.60	0.65	0.68	0.73	0.77	0.82
70	0.52	0.55	0.57	0.60	0.63	0.67	0.70	0.75	0.78	0.84
75	0.56	0.58	0.60	0.63	0.65	0.70	0.73	0.77	0.80	0.85
80	0.59	0.61	0.63	0.66	0.68	0.72	0.75	0.79	0.82	0.87
85	0.63	0.65	0.66	0.69	0.71	0.75	0.75	0.82	0.85	0.89
90	0.67	0.68	0.70	0.72	0.74	0.78	0.80	0.84	0.87	0.91
95	0.70	0.72	0.73	0.75	0.77	0.80	0.83	0.87	0.89	0.93
100	0.74	0.75	0.76	0.79	0.80	0.83	0.86	0.89	0.92	0.95

$m_s = \pm 0.0015\text{ m}$ $m_{\alpha} = \pm 1.5''$ $m_k = \pm 0.05$

从表 1 看出距离在 100 m、垂直角在 28° 以内,按式(8)计算 $m_{\Delta H_{AB}}$ 是小于 $\pm 1.0\text{ mm}$ 的。

而从表 2 看出,当距离较长、垂直角较大时(带底色的数值), $m_{\Delta H_{AB}}$ 是大于 $\pm 1.0\text{ mm}$ 的。

从而得出结论,在一定的距离和一定的垂直角下, $m_{\Delta H_{AB}}$ 是能满足 $\pm 1.0\text{ mm}$ 的要求的。

5. 不量取仪器高、棱镜高的措施。① 在一个测站上观测 A 和 B 点的距离和垂直角,并保持仪器稳定,否则应重新安置仪器并重新观测。② 观测 A 点完成后,把放置在 A 点的棱镜移至 B 点,此时应严格保持棱镜高不发生任何变化,以消去棱镜高,确保不产生棱镜高误差。

四、观测要求

每个测站要采用不同的仪器高进行 2 次测量,根据精度要求,距离和垂直角最大允许值参照表 2。

前后视所使用的花杆及棱镜必须是同一套,不量取仪器高。

每次测量的技术要求如表 3、表 4。

表 3 垂直角测量

视线长	测回数	两次 读数差	测回间指 标差互差	测回差
$\leq 100\text{ m}$	4	$\leq \pm 1.0''$	$\leq \pm 3.0''$	$\leq \pm 2.0''$

表 4 距离测量

测回数	每测回 读数次数	四次读 数差	测回差
2	4	$\leq \pm 2.0\text{ mm}$	$\leq \pm 2.0\text{ mm}$

五、读数要求

- 1. 垂直角读、记至 $0.1''$,计算至 $0.1''$ 。
- 2. 距离读、记至 0.1 mm ,计算至 0.1 mm 。
- 3. 气温读、记至 $0.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。
- 4. 气压读、记至 1 Pa 。

六、高差较差要求

- 1. 两次仪器高测得的高差较差应 $\leq \pm 1.0\text{ mm}$ 。
- 2. 不同测站测得的相同两点的高差的较差应 $\leq \pm 1.0\text{ mm}$ 。

七、仪器设备配备

采用 TC2003 及配套棱镜、定长标杆棱镜。

TC2003 型全站仪测角为精度 $0.5''$,测距精度为 $\pm(1\text{ mm} + 1 \times 10^{-6} D)$ 。

八、不量仪器高、棱镜高的三角高程测量的验证

1. 验证的标准

为了验证不量仪器高、棱镜高的三角高程测量高差的可靠性,采用精密水准仪配合钢瓦基线尺把高差传递到一定的高度,再用不量仪器高、棱镜高的三角高程测量测定这一高差,两者比较是否达到 $\pm 1.0 \text{ mm}$ 的精度,见图 2。

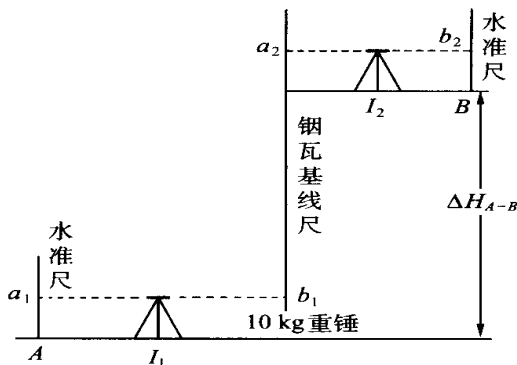


图 2

2. 精密水准仪和钢瓦基线尺传递高程的实施

1. 在 I_1 处安置水准仪读取水准尺读数 a_1 ;
2. 同时在 I_2 处安置水准仪读取水准尺读数 b_2 ;
3. 然后在 I_1 和 I_2 处的水准仪同时读取钢瓦基线尺的读数 b_1 和 a_2 ;
4. 求 AB 的高差 ΔH_{A-B} :

$$\Delta H_{AB} = a_1 + (a_2 - b_1) - b_2 + \text{线尺改正的长度}$$

(8)

式中, a_1 为 A 点处水准尺读数; b_1 为钢瓦线尺后端读数; a_2 为钢瓦线尺前端读数; b_2 为 B 点处水准尺读数。

5. 实际操作时利用 SECRETAN 205 号 8 m 和 206 号 24 m 两根基线尺和两台 N_3 水准仪、水准尺测量 AB , CD 两处的高差,测量结果为

$$\Delta H_{AB} = 8.10592 \text{ m}$$

$$m\Delta H_{AB} = \pm 0.26 \text{ mm}$$

和

$$\Delta H_{CD} = 24.69679 \text{ m}$$

$$m\Delta H_{CD} = \pm 0.24 \text{ mm}$$

利用钢瓦基线尺进行垂直测量,除按常规进行尺长、温度等改正外,还必须进行悬链线的改正,由于线尺是垂直悬挂的,必须注意到基线尺检定的长度为水平弦长 l_0 (图 3),垂直悬挂丈量时尺子被拉直了,用的是弧长 s_0 来丈量,结果是尺子长了,距离被量短了,因此应加弧长与弦长差值的改正。

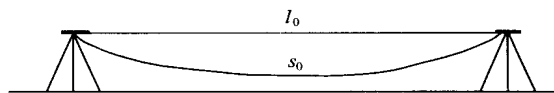


图 3

根据陈永龄教授《大地测量学上卷第一分册》给出的弧长与弦长差值的公式为

$$s_0 - l_0 = \frac{l^3}{24k^2} \quad (9)$$

式中, $k = 577.24 \text{ m}$, 当线尺为 24 m 时

$$s_0 - l_0 = \frac{l^3}{24k^2} = 24^3 / 24 \times 577.24^2 = 1.73 \text{ mm}$$

当线尺为 8 m 时

$$s_0 - l_0 = \frac{l^3}{24k^2} = 8^3 / 24 \times 577.24^2 = 0.06 \text{ mm}$$

因此用基线尺进行垂直量长时,对此进行弧长与弦长之差的改正。

6. 用不量仪器高、棱镜高三角高程测量的方法测定 AB , CD 的高差 ΔH_{AB} , ΔH_{CD} , 得

$$\Delta H_{AB} = 8.10680 \text{ m}$$

$$\Delta H_{CD} = 24.69741 \text{ m}$$

两者的较差

$$\Delta H_{AB} - \Delta H_{AB} = -0.88 \text{ mm}$$

$$\Delta H_{CD} - \Delta H_{CD} = -0.62 \text{ mm}$$

两者高差的较差均小于 1.0 mm, 满足设计的要求。

九、结 论

目前该方法正运用于上海市磁悬浮快速列车工程建设,实践证明该方法的准确性和可行性。

参考文献:

- [1] CJJ8-1999. 城市测量规范[S].
- [2] 陈永龄. 大地测量学[M]. 北京:测绘出版社,1957.